

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 755777 22 maggio 2025
--------------------------------	--------------------	---------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	a
2	b
3	b
4	b
5	a
6	a
7	d
8	d
9	d
10	b

1. La funzione $f : (0, + \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan \left(\frac{\pi x}{2(x + 1)} \right)$

► (a) non ha nessun tipo di asintoto

(b) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto

(c) ha un asintoto verticale e nessun altro asintoto

(d) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right)$$

Osserviamo che $\frac{\pi x}{2(x+1)} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$, inoltre

$$\frac{\pi x}{2(x+1)} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < 1 \quad \text{sempre vera } \forall x \in (0, +\infty).$$

Quindi l'argomento della tangente è sempre compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Dato che f è continua, l'unico asintoto verticale potrebbe essere per $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \frac{0}{2} = 0$$

quindi f non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = +\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali.

f potrebbe avere un asintoto obliquo (in realtà non lo ha)

ma è inutile controllarlo perché tre risposte sono false

quindi f non ha nessun tipo di asintoto.

2. La funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{4x^2 + e^x}{x^3}$

- (a) non ha minimo ma è inferiormente limitata ► (b) ha minimo
(c) ha massimo (d) non è inferiormente limitata

Soluzione:

$$f(x) = \frac{4x^2 + e^x}{x^3}$$

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

La funzione è continua in tutto il suo dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 + e^x}{x^3} = \frac{0+1}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(\frac{4x^2}{e^x} + 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2}{e^x} + 1 \right) =$$

$$= +\infty (0+1) = +\infty \quad \text{per grandezza di infiniti.}$$

Per il teorema di Weierstrass generalizzato la funzione ha minimo e non ha massimo.

$$3. \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx =$$

$$(a) \frac{e^4 + 1}{2e^2}$$

$$\blacktriangleright (b) \frac{e^2 - 1}{e}$$

$$(c) \frac{e^4 + 2e^3 - 2e - 1}{2e^2}$$

$$(d) \frac{2}{e}$$

Soluzione:

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx$$

$1/e$

Calcoliamo prima una primitiva,

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(xe^x)}{x} dx &= \int \frac{\log x + \log(e^x)}{x} dx = \int \frac{\log x + x}{x} dx = \int \frac{\log x}{x} dx + \int 1 dx = \\ &= \int \frac{\log x}{x} dx + x \end{aligned}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale con la sostituzione

$$\log x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dt = \frac{dx}{x}, \quad \text{ottenendo:}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\log^2 x}{2} + c. \quad \text{Quindi}$$

$$\int \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \frac{\log^2 x}{2} + x + c. \quad \text{Dal teorema di Torricelli:}$$

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \left[\frac{\log^2 x}{2} + x \right]_{1/e}^e = \frac{\log^2 e}{2} + e - \frac{\log^2(1/e)}{2} - \frac{1}{e} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + e - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

4. La funzione $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{4+t}$

(a) è debolmente monotona

► (b) assume sia valori positivi che negativi

(c) è sempre ≥ 0

(d) è sempre ≤ 0

Soluzione:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{4+t}, \quad F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Poniamo $f(t) = \frac{1}{4+t}$ e osserviamo che $f(t) > 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$.

Ne segue che $\int_a^b f(t) dt > 0 \quad \forall a, b \in [0, +\infty) \text{ con } a < b.$

Quindi se $x < x^2$ avremo che $F(x) > 0$, e $x > x^2 \Rightarrow F(x) < 0$.

Poiché se $x \in [0, 1) \Rightarrow x > x^2$ e se $x \in (1, +\infty) \Rightarrow x < x^2$

otteniamo che F cambia segno.

In alternativa si poteva calcolare esplicitamente

l'integrale e studiare il segno della funzione ottenuta.

5. $\int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} dx$

► (a) converge

(b) diverge positivamente

(c) diverge negativamente

(d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)}$ e osserviamo che f è

continua $\forall x \in (0,1)$ mentre negli estremi dell'intervallo f non è definita. Dividiamo l'intervallo nel punto $x = \frac{1}{2}$.

Per $x \rightarrow 0$ utilizziamo gli sviluppi di Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \log(1-x) = -x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \quad \text{con} \quad t = x^{3/2} \Rightarrow e^{x\sqrt{x}} = 1 + x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1 + x^{3/2} + o(x^{3/2}) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(-x + o(x))} = \frac{x^{3/2} + o(x^{3/2})}{x^2(-1 + o(1))} =$$

$$= \frac{x^{3/2}(1 + o(1))}{x^2(-1 + o(1))} = \frac{1}{x^{1/2}} \frac{1 + o(1)}{-1 + o(1)}$$

Scegliamo ora $g(x) = \frac{-1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad . \quad \text{Poiché} \quad \int_0^1 g(x) dx \quad \text{converge,}$$

per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^{1/2} f(x) dx$ converge.

Osserviamo ora che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{e^1 - \cos 1}{1 \cdot \log(0^+)} = \frac{e - \cos 1}{-\infty} = 0$$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$,
 pertanto $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ converge,

ne segue che $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

6. $\int_0^{+\infty} \frac{(e^x - 1) \arctan(x-1)}{x^2} dx$

- (a) non esiste (b) converge (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

Dividiamo l'intervallo di integrazione e
 consideriamo $\int_0^1 f(x) dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ con $f(x) = \frac{(e^x - 1) \arctan(x-1)}{x^2}$

per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) = \frac{(1+x+o(x)-1)(\arctan(-1)+o(1))}{x^2} = \frac{(1+o(1))(-\frac{\pi}{4}+o(1))}{x}$

ponendo $g(x) = \frac{1}{x}$ otteniamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(x)}{g(x)} = \frac{\pi}{4}$. Dato che
 $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$, dal confronto asintotico

$$\int_0^1 f(x) dx = -\infty.$$

per $x \rightarrow +\infty$ scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(e^x - 1) \arctan(x-1)}{x^2} = +\infty$$

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$, dal criterio del confronto

asintotico anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ non esiste.

7. Data la successione $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, definita per $n \geq 1$, risulta che

(a) (a_n) è limitata

(b) (a_n) è strettamente decrescente

(c) $\sup(a_n) = 0$

► (d) $\sup(a_n) = +\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad n \geq 1.$$

Calcoliamo il limite di (a_n) utilizzando il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 3 (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3 \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 3 e^{n \log \left(\frac{n}{n+1} \right)} = \\ &= 3 e^{n \log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)} \end{aligned}$$

Poiché $\log t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, sostituendo $t = -\frac{1}{n+1}$

otteniamo che $\log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} (1 + o(1))$, $n \rightarrow +\infty$.

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 e^{\frac{-n}{n+1} (1 + o(1))} \rightarrow 3 e^{-1} = \frac{3}{e} > 1.$$

Per il criterio del rapporto abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

quindi $\sup(a_n) = +\infty$.

8. La serie $\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$

(a) converge assolutamente

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) diverge positivamente

► (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$$

Poniamo $a_n = \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo che

$$\cos((2n+1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1, \text{ quindi } a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+2}}$$

e la serie è a termini negativi.

Poniamo ora $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{-\sqrt{n+2}} = -1.$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge positivamente, dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge negativamente.

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} =$

- (a) non esiste (b) $+\infty$ (c) 0 ► (d) $-\infty$

Soluzione:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\cos(3-0+0)}{0^+} = \frac{\cos 3}{0^+} = -\infty$$

poiché $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ quindi $\cos 3 < 0$.

10. Nel punto $(0,0)$, la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos y} \sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- (a) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali
 ► (b) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua
 (c) ha entrambe le derivate parziali ed è continua
 (d) ha una sola derivata parziale

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos y} \sin x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Consideriamo la derivata parziale rispetto a x in $(0,0)$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{1-\cos 0} \sin h}{h(h^2+0)} = 0 \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Per la derivata rispetto a y avremo:

$$\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \frac{\sqrt{1-\cos h} \sin 0}{h(0+h^2)} = 0 \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

f ha quindi entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

Vediamo la continuità.

Se consideriamo la curva $\gamma(t) = (t,0)$ (asse x) avremo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos 0} \sin t}{t^2+0} = 0$$

Se invece consideriamo $\alpha(t) = (t,t)$, $t > 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\alpha(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos t} \sin t}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{2t} \cdot \frac{\sin t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}}{2t} \cdot 1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2(\frac{1}{2}+o(t))}}{2t} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \sqrt{\frac{1}{2}+o(t)}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

quindi f non è continua in $(0,0)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 537178 22 maggio 2025
--------------------------------	--------------------	---------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	a
2	a
3	c
4	c
5	c
6	a
7	d
8	a
9	c
10	a

1. La funzione $f : (0, + \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan \left(\frac{\pi x}{2(x + 1)} \right)$

►

(a) non ha nessun tipo di asintoto

(b) ha un asintoto verticale e nessun altro asintoto

(c) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

(d) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto
- Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right)$$

Osserviamo che $\frac{\pi x}{2(x+1)} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$, inoltre

$$\frac{\pi x}{2(x+1)} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < 1 \quad \text{sempre vera } \forall x \in (0, +\infty).$$

Quindi l'argomento della tangente è sempre compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Dato che f è continua, l'unico asintoto verticale potrebbe essere per $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \frac{0}{2} = 0$$

quindi f non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = +\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali.

f potrebbe avere un asintoto obliquo (in realtà non lo ha)

ma è inutile controllarlo perché tre risposte sono false

quindi f non ha nessun tipo di asintoto.

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{4/3} \sin x}{1 + (\cos x)^2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2} \right) =$$

► (a) non esiste

(b) $+\infty$

(c) $-\infty$

(d) $\frac{1}{3}$

Soluzione:

$$f(x) = \frac{x^{4/3} \sin x}{1 + \cos^2 x} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2} \right)$$

Osserviamo che, per $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2} &= \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right)^{1/3} - x^{2/3} = x^{2/3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1/3} - x^{2/3} = \\ &= x^{2/3} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - x^{2/3} = x^{2/3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3} + o(1) \right) - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{x^{4/3}} \left(\frac{1}{3} + o(1) \right), \end{aligned}$$

$$\text{quindi } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{4/3} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2} \right) = \frac{1}{3}.$$

Scegliamo ora $a_n = n\pi$ e $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Risulta che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\pi)}{1 + \cos^2(n\pi)} \cdot (n\pi)^{4/3} \left(\sqrt[3]{(n\pi)^2+1} - \sqrt[3]{(n\pi)^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1+1} \cdot (n\pi)^{4/3} \left(\sqrt[3]{(n\pi)^2+1} - \sqrt[3]{(n\pi)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}{1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \cdot b_n^{4/3} \left(\sqrt[3]{b_n^2+1} - \sqrt[3]{b_n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+0} b_n^{4/3} \left(\sqrt[3]{b_n^2+1} - \sqrt[3]{b_n^2} \right) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, otteniamo che

non esiste $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

$$3. \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx =$$

$$(a) \frac{e^4 + 1}{2e^2}$$

$$(b) \frac{e^4 + 2e^3 - 2e - 1}{2e^2}$$

$$\blacktriangleright (c) \frac{e^2 - 1}{e}$$

$$(d) \frac{2}{e}$$

Soluzione:

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx$$

1/e

Calcoliamo prima una primitiva,

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(xe^x)}{x} dx &= \int \frac{\log x + \log(e^x)}{x} dx = \int \frac{\log x + x}{x} dx = \int \frac{\log x}{x} dx + \int 1 dx = \\ &= \int \frac{\log x}{x} dx + x \end{aligned}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale con la sostituzione

$$\log x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dt = \frac{dx}{x}, \quad \text{ottenendo:}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\log^2 x}{2} + c. \quad \text{Quindi}$$

$$\int \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \frac{\log^2 x}{2} + x + c. \quad \text{Dal teorema di Torricelli:}$$

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \left[\frac{\log^2 x}{2} + x \right]_{1/e}^e = \frac{\log^2 e}{2} + e - \frac{\log^2(1/e)}{2} - \frac{1}{e} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + e - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_0^{\sin \frac{1}{x+1}} e^{t^2+1} dt =$$

(a) 0

(b) $+\infty$

► (c) e

(d) non esiste

Soluzione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_0^{\sin(\frac{1}{x})} e^{t^2+1} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\sin(\frac{1}{x})} e^{t^2+1} dt}{\frac{1}{x}}$$

e il limite è della forma $\frac{0}{0}$. Applichiamo de l'Hospital
e calcoliamo il limite del quoziente delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sin^2(\frac{1}{x})+1} \cdot \cos(\frac{1}{x}) (-\frac{1}{x^2})}{e^{\sin^2(0)+1} \cdot \cos(0) \cdot (-\frac{1}{x^2})} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sin^2(0)+1} \cdot \cos(0) \right) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = e \cdot 1 = e.$$

5. $\int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} dx$

(a) non esiste

(b) diverge negativamente

(c) converge

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)}$ e osserviamo che f è

continua $\forall x \in (0,1)$ mentre negli estremi dell'intervallo f non è definita. Dividiamo l'intervallo nel punto $x = \frac{1}{2}$.

Per $x \rightarrow 0$ utilizziamo gli sviluppi di Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \log(1-x) = -x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \quad \text{con} \quad t = x^{3/2} \Rightarrow e^{x\sqrt{x}} = 1 + x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1 + x^{3/2} + o(x^{3/2}) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(-x + o(x))} = \frac{x^{3/2} + o(x^{3/2})}{x^2(-1 + o(1))} =$$

$$= \frac{x^{3/2}(1 + o(1))}{x^2(-1 + o(1))} = \frac{1}{x^{1/2}} \frac{1 + o(1)}{-1 + o(1)}$$

Scegliamo ora $g(x) = \frac{-1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad . \quad \text{Poiché} \quad \int_0^1 g(x) dx \quad \text{converge,}$$

per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^{1/2} f(x) dx$ converge.

Osserviamo ora che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{e^1 - \cos 1}{1 \cdot \log(0^+)} = \frac{e - \cos 1}{-\infty} = 0$$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$,
pertanto $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ converge,

ne segue che $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

6. $\int_{-1}^2 \frac{e^x - \cos x}{x \sin x} dx$

- (a) non esiste (b) converge (c) diverge positivamente (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\int_{-1}^2 \frac{e^x - \cos x}{x \sin x} dx$$

La funzione $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{x \sin x}$ non è definita per $x=0$.

Utilizzando la formula di Taylor per $x \rightarrow 0$, otteniamo

$$f(x) = \frac{1+x+o(x) - (1+o(x))}{x(x+o(x^2))} = \frac{x+o(x)}{x^2(1+o(x))} = \frac{1}{x} \frac{1+o(1)}{1+o(x)}$$

Dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x=0$.

Usiamo il criterio di confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Dato che $\int_0^2 \frac{1}{x} dx = +\infty$ avremo che

$$\int_0^2 f(x) dx = +\infty.$$

Dato che $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx = -\infty$ allora anche $\int_{-1}^0 f(x) dx = -\infty$

Quindi $\int_{-1}^2 f(x) dx$ non esiste.

7. Data la successione $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, definita per $n \geq 1$, risulta che

(a) (a_n) è limitata

(b) $\sup(a_n) = 0$

(c) (a_n) è strettamente decrescente

► (d) $\sup(a_n) = +\infty$

Soluzione:

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad n \geq 1.$$

Calcoliamo il limite di (a_n) utilizzando il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 3 (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3 \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 3 e^{n \log \left(\frac{n}{n+1} \right)} =$$

$$= 3 e^{n \log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)}$$

Poiché $\log t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, sostituendo $t = -\frac{1}{n+1}$

otteniamo che $\log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} (1 + o(1))$, $n \rightarrow +\infty$.

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 e^{\frac{-n}{n+1} (1+o(1))} \rightarrow 3 e^{-1} = \frac{3}{e} > 1.$$

Per il criterio del rapporto abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

quindi $\sup(a_n) = +\infty$.

8. La serie $\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$

► (a) diverge negativamente

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) converge assolutamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$$

Poniamo $a_n = \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo che

$$\cos((2n+1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1, \text{ quindi } a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+2}}$$

e la serie è a termini negativi.

Poniamo ora $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{-\sqrt{n+2}} = -1.$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge positivamente, dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge negativamente.

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} =$

(a) $+\infty$

(b) non esiste

► (c) $-\infty$

(d) 0

Soluzione:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\cos(3-0+0)}{0^+} = \frac{\cos 3}{0^+} = -\infty$$

poiché $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ quindi $\cos 3 < 0$.

10. Sia $f(x,y) = \frac{x^4 - y^2}{x^2 + y^2}$. Tra le seguenti direzioni, in quale la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$ è massima?

► (a) $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(b) $v = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(c) $v = (-1,0)$

(d) $v = (0,1)$

Soluzione:

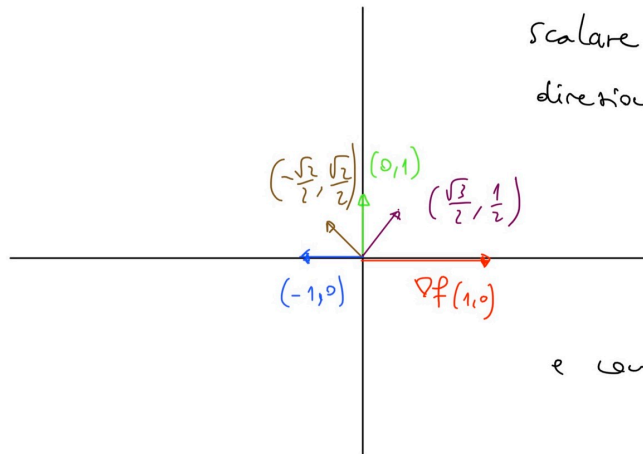
$$f(x,y) = \frac{x^4 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3(x^2+y^2) - (x^4-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{4 \cdot 1(1+0) - (1-0) \cdot 2 \cdot 1}{(1+0)^2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^4-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,0) = (2,0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v = (2,0) \cdot v.$$



Geometricamente è evidente che il prodotto scalare è massimo nella direzione $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

In alternativa basta calcolare i prodotti scalari e confrontare i risultati.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 653599 22 maggio 2025
--------------------------------	--------------------	---------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	c
2	b
3	c
4	d
5	b
6	c
7	a
8	d
9	d
10	a

1. La funzione $f : (0, + \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan \left(\frac{\pi x}{2(x + 1)} \right)$

(a) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

(b) ha un asintoto verticale e nessun altro asintoto

► (c) non ha nessun tipo di asintoto

(d) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto

Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right)$$

Osserviamo che $\frac{\pi x}{2(x+1)} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$, inoltre

$$\frac{\pi x}{2(x+1)} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < 1 \quad \text{sempre vera } \forall x \in (0, +\infty).$$

Quindi l'argomento della tangente è sempre compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Dato che f è continua, l'unico asintoto verticale potrebbe essere per $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \frac{0}{2} = 0$$

quindi f non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = +\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali.

f potrebbe avere un asintoto obliquo (in realtà non lo ha)

ma è inutile controllarlo perché tre risposte sono false

quindi f non ha nessun tipo di asintoto.

2. La funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{x^6 + \log x}{x^4 + e^{\sqrt{x}}}$

- (a) ha un asintoto obliquo ► (b) ha un asintoto orizzontale e uno verticale
(c) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto (d) non ha asintoti verticali

Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^6 + \log x}{x^4 + e^{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0 - \infty}{0 + e^0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty \quad \text{asintoto verticale } x=0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty + \infty}{\infty + e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} ?$$

$$\frac{x^6 + \log x}{x^4 + e^{\sqrt{x}}} = \frac{x^6 \left(1 + \frac{\log x}{x^6}\right)}{e^{\sqrt{x}} \left(\frac{x^4}{e^{\sqrt{x}}} + 1\right)} = \frac{\frac{x^6}{e^{\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{\log x}{x^6}\right)}{\frac{x^4}{e^{\sqrt{x}}} + 1} \rightarrow 0 \cdot \frac{1+0}{0+1} = 0$$

asintoto orizzontale $y=0$.

$$3. \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx =$$

(a) $\frac{e^4 + 1}{2e^2}$

(b) $\frac{2}{e}$

► (c) $\frac{e^2 - 1}{e}$

(d) $\frac{e^4 + 2e^3 - 2e - 1}{2e^2}$

Soluzione:

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx$$

$1/e$

Calcoliamo prima una primitiva,

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(xe^x)}{x} dx &= \int \frac{\log x + \log(e^x)}{x} dx = \int \frac{\log x + x}{x} dx = \int \frac{\log x}{x} dx + \int 1 dx = \\ &= \int \frac{\log x}{x} dx + x \end{aligned}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale con la sostituzione

$$\log x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dt = \frac{dx}{x}, \quad \text{ottenendo:}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\log^2 x}{2} + c. \quad \text{Quindi}$$

$$\int \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \frac{\log^2 x}{2} + x + c. \quad \text{Dal teorema di Torricelli:}$$

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \left[\frac{\log^2 x}{2} + x \right]_{1/e}^e = \frac{\log^2 e}{2} + e - \frac{\log^2(1/e)}{2} - \frac{1}{e} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + e - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

4. $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\log x)^2} =$

(a) $1 - \log 2$

(b) $\frac{1}{\log 2} - \log 2$

(c) $1 - \frac{1}{\log 2} - \log(\log 2)$ ➤ (d) $\frac{1}{\log 2} - 1$

Soluzione:

$$\int \frac{dx}{x(\log x)^2}$$

$$\log x = t \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \quad \frac{dx}{x} = dt$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\log \frac{1}{2}} + \frac{1}{\log \frac{1}{e}} = -\frac{1}{-\log 2} + \frac{1}{-\log e}$$

$$= \frac{1}{\log 2} - 1$$

5. $\int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} dx$

(a) diverge negativamente ➤

(b) converge

(c) non esiste

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)}$ e osserviamo che f è

continua $\forall x \in (0,1)$ mentre negli estremi dell'intervallo f non è definita. Dividiamo l'intervallo nel punto $x = \frac{1}{2}$.

Per $x \rightarrow 0$ utilizziamo gli sviluppi di Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \log(1-x) = -x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \quad \text{con} \quad t = x^{3/2} \Rightarrow e^{x\sqrt{x}} = 1 + x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1 + x^{3/2} + o(x^{3/2}) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(-x + o(x))} = \frac{x^{3/2} + o(x^{3/2})}{x^2(-1 + o(1))} =$$

$$= \frac{x^{3/2}(1 + o(1))}{x^2(-1 + o(1))} = \frac{1}{x^{1/2}} \frac{1 + o(1)}{-1 + o(1)}$$

Scegliamo ora $g(x) = \frac{-1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad . \quad \text{Poiché} \quad \int_0^1 g(x) dx \quad \text{converge,}$$

per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^{1/2} f(x) dx$ converge.

Osserviamo ora che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{e^1 - \cos 1}{1 \cdot \log(0^+)} = \frac{e - \cos 1}{-\infty} = 0$$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$,
pertanto $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ converge,

ne segue che $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

6. $\int_0^{+\infty} (\cos \sqrt{x}) \left(\sin \frac{1}{x^3} \right) dx$

- (a) diverge negativamente (b) diverge positivamente (c) converge (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} (\cos \sqrt{x}) \left(\sin \frac{1}{x^3} \right) dx.$$

Poniamo $f(x) = (\cos \sqrt{x}) \left(\sin \frac{1}{x^3} \right)$ e osserviamo che f non è definita per $x=0$. Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo $\int_0^1 f(x) dx$. La f è di segno variabile e risulta

$|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$, quindi, per il criterio del confronto e dell'assoluta integrabilità, $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

Per $x \geq 1$ avremo che

$$|f(x)| \leq \left| \sin \frac{1}{x^3} \right| = \sin \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) = \frac{1}{x^3} \left(1 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^3}$ e ricordando che $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ converge,
dal criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^3} dx$ converge.

Dal criterio del confronto avremo che

$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, quindi, dal criterio di assoluta integrabilità,
 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

7. Data la successione $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, definita per $n \geq 1$, risulta che

- (a) $\sup(a_n) = +\infty$ (b) $\sup(a_n) = 0$
(c) (a_n) è strettamente decrescente (d) (a_n) è limitata

Soluzione:

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad n \geq 1.$$

Calcoliamo il limite di (a_n) utilizzando il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 3 (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3 \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 3 e^{n \log \left(\frac{n}{n+1} \right)} = \\ &= 3 e^{n \log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)} \end{aligned}$$

Poiché $\log t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, sostituendo $t = -\frac{1}{n+1}$

otteniamo che $\log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} (1 + o(1))$, $n \rightarrow +\infty$.

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 e^{\frac{-n}{n+1} (1+o(1))} \rightarrow 3 e^{-1} = \frac{3}{e} > 1.$$

Per il criterio del rapporto abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

quindi $\sup(a_n) = +\infty$.

8. La serie $\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$

- (a) converge ma non converge assolutamente (b) diverge positivamente
(c) converge assolutamente ► (d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$$

Poniamo $a_n = \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo che

$$\cos((2n+1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1, \text{ quindi } a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+2}}$$

e la serie è a termini negativi.

Poniamo ora $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{-\sqrt{n+2}} = -1.$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge positivamente, dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge negativamente.

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} =$

(a) $+\infty$

(b) 0

(c) non esiste

► (d) $-\infty$

Soluzione:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\cos(3-0+0)}{0^+} = \frac{\cos 3}{0^+} = -\infty$$

poiché $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ quindi $\cos 3 < 0$.

10. Nel punto (1,3) la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{y-2} & \text{se } y \neq 3 \\ 1 & \text{se } y = 3 \end{cases}$

► (a) non è continua e ha una sola derivata parziale

(b) è differenziabile

(c) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(d) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{y-2} & \text{se } y \neq 3 \\ 1 & \text{se } y = 3 \end{cases}$$

Vediamo la continuità nel punto $(1,3)$.

Consideriamo la restrizione alla retta $x=1$, quindi la curva

$$\gamma(t) = (1, 3+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(1, 3+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-1}{3-2} = 0 \neq f(1,3) = 1$$

La funzione non è quindi continua in $(1,3)$.

Vediamo ora le derivate parziali. Ricordando che $f(x,y)=1$ se $y=3$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h,3) - f(1,3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1,3+h) - f(1,3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1-1}{3+h-2} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{h} = \begin{cases} -\infty & \text{per } h \rightarrow 0^+ \\ +\infty & \text{per } h \rightarrow 0^- \end{cases}$$

quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3)$ non esiste.

La funzione ha quindi una sola derivata parziale e non è continua nel punto $(1,3)$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 160263 22 maggio 2025
--------------------------------	--------------------	---------------------------------

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

1	d
2	a
3	b
4	c
5	c
6	b
7	a
8	c
9	d
10	c

1. La funzione $f : (0, + \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \tan \left(\frac{\pi x}{2(x + 1)} \right)$
- (a) ha un asintoto verticale e nessun altro asintoto

(b) ha un asintoto orizzontale e nessun altro asintoto

(c) ha un asintoto verticale e uno orizzontale

► (d) non ha nessun tipo di asintoto

Soluzione:

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right)$$

Osserviamo che $\frac{\pi x}{2(x+1)} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$, inoltre

$$\frac{\pi x}{2(x+1)} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < 1 \quad \text{sempre vera } \forall x \in (0, +\infty).$$

Quindi l'argomento della tangente è sempre compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Dato che f è continua, l'unica asintoto verticale potrebbe essere per $x \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \frac{0}{2} = 0$$

quindi f non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2(x+1)} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = +\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali.

f potrebbe avere un asintoto obliquo (in realtà non lo ha)

ma è inutile controllarlo perché tre risposte sono false

quindi f non ha nessun tipo di asintoto.

2. L'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \tan x \leq 1\}$:

- (a) contiene tutti i suoi punti di accumulazione reali
- (b) è un intervallo
- (c) è limitato inferiormente
- (d) è limitato superiormente

Soluzione:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \tan x \leq 1\}$$

Osserviamo che la funzione tangente è strettamente crescente nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ quindi, in tale intervallo.

$$0 \leq \tan x \leq 1 \Leftrightarrow \arctan 0 \leq x \leq \arctan 1 \quad \text{cioè} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

Poiché la tangente è periodica di periodo π , otteniamo che

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}]$$

Ne segue che l'insieme A non è limitato né superiormente né inferiormente e non è un intervallo.

Osserviamo ora che $\mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (k\pi + \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi)$ che è aperto

perché è unione di aperti, quindi A è chiuso quindi contiene tutti i suoi punti di accumulazione in $\mathbb{R}$.

$$3. \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx =$$

(a) $\frac{2}{e}$

► (b) $\frac{e^2 - 1}{e}$

(c) $\frac{e^4 + 1}{2e^2}$

(d) $\frac{e^4 + 2e^3 - 2e - 1}{2e^2}$

Soluzione:

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx$$

1/e

Calcoliamo prima una primitiva,

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(xe^x)}{x} dx &= \int \frac{\log x + \log(e^x)}{x} dx = \int \frac{\log x + x}{x} dx = \int \frac{\log x}{x} dx + \int 1 dx = \\ &= \int \frac{\log x}{x} dx + x \end{aligned}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale con la sostituzione

$$\log x = t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dt = \frac{dx}{x}, \quad \text{ottenendo:}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\log^2 x}{2} + c. \quad \text{Quindi}$$

$$\int \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \frac{\log^2 x}{2} + x + c. \quad \text{Dal teorema di Torricelli:}$$

$$\int_{1/e}^e \frac{\log(xe^x)}{x} dx = \left[\frac{\log^2 x}{2} + x \right]_{1/e}^e = \frac{\log^2 e}{2} + e - \frac{\log^2(1/e)}{2} - \frac{1}{e} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + e - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

4. $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x dx =$

(a) 0

(b) 2π

► (c) -3π

(d) $-\pi$

Soluzione:

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x \, dx = \int_{-\pi}^0 -x \sin x \, dx + \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx$$

Eseguiamo l'integrale indefinito per parti integrando $\sin x$ e derivando x

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\text{Quindi } \int_{-\pi}^0 -x \sin x \, dx = \left[-(-x \cos x + \sin x) \right]_{-\pi}^0 =$$

$$= \left[x \cos x - \sin x \right]_{-\pi}^0 = 0 - 0 - (-\pi \cos(-\pi) - \sin(-\pi)) = \pi(-1) = -\pi$$

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{2\pi} = -2\pi \cos(2\pi) + \sin(2\pi) + 0 \cos 0 - \sin 0 =$$

$$= -2\pi \cdot 1 = -2\pi$$

$$\text{Quindi } \int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x \, dx = -\pi - 2\pi = -3\pi.$$

$$5. \int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} \, dx$$

(a) diverge negativamente (b) non esiste

► (c) converge

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)} dx$$

Poniamo $f(x) = \frac{e^{x\sqrt{x}} - \cos x}{x \log(1-x)}$ e osserviamo che f è

continua $\forall x \in (0,1)$ mentre negli estremi dell'intervallo f non è definita. Dividiamo l'intervallo nel punto $x = \frac{1}{2}$.

Per $x \rightarrow 0$ utilizziamo gli sviluppi di Taylor

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \log(1-x) = -x + o(x)$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \quad \text{con} \quad t = x^{3/2} \Rightarrow e^{x\sqrt{x}} = 1 + x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1 + x^{3/2} + o(x^{3/2}) - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(-x + o(x))} = \frac{x^{3/2} + o(x^{3/2})}{x^2(-1 + o(1))} =$$

$$= \frac{x^{3/2}(1 + o(1))}{x^2(-1 + o(1))} = \frac{1}{x^{1/2}} \frac{1 + o(1)}{-1 + o(1)}$$

Scegliamo ora $g(x) = \frac{-1}{x^{1/2}}$ e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad . \quad \text{Poiché} \quad \int_0^1 g(x) dx \quad \text{converge,}$$

per il criterio del confronto asintotico, anche $\int_0^{1/2} f(x) dx$ converge.

Osserviamo ora che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{e^1 - \cos 1}{1 \cdot \log(0^+)} = \frac{e - \cos 1}{-\infty} = 0$$

quindi f è limitata in un intorno di $x=1$,
 pertanto $\int_{1/2}^1 f(x) dx$ converge,

ne segue che $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

6. $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx$

- (a) non esiste ► (b) converge (c) diverge a $-\infty$ (d) diverge a $+\infty$

Soluzione:

Sia $f(x) = \frac{\log x}{1+x^2}$. $x \in (0, +\infty)$

f non è limitata in un intorno destro di 0. Ponendo

$g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ abbiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{1/2} \log x}{1+x^2} = 0$,

possiamo applicare il criterio del confronto asintotico ottenendo

che $\int_0^1 f(x) dx$ converge dato che $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge.

(Abbiamo utilizzato il fatto che f ha segno costante in $(0, 1]$).

Per $x \rightarrow +\infty$ prendiamo $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ e abbiamo $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} \log x}{1+x^2} = 0$. Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$

converge, abbiamo che $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

7. Data la successione $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, definita per $n \geq 1$, risulta che

- (a) $\sup(a_n) = +\infty$ (b) (a_n) è limitata
 (c) $\sup(a_n) = 0$ (d) (a_n) è strettamente decrescente

Soluzione:

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad n \geq 1.$$

Calcoliamo il limite di (a_n) utilizzando il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= 3 (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 3 \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = 3 e^{n \log \left(\frac{n}{n+1} \right)} = \\ &= 3 e^{n \log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)} \end{aligned}$$

Poichè $\log t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, sostituendo $t = -\frac{1}{n+1}$

otteniamo che $\log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = -\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1} (1 + o(1))$, $n \rightarrow +\infty$.

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 e^{\frac{-n}{n+1} (1+o(1))} \rightarrow 3 e^{-1} = \frac{3}{e} > 1.$$

Per il criterio del rapporto abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

quindi $\sup(a_n) = +\infty$.

8. La serie $\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$

- (a) diverge positivamente
- (b) converge assolutamente
- (c) diverge negativamente
- (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_n \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$$

Poniamo $a_n = \frac{\cos((2n+1)\pi)}{\sqrt{n+2}}$ e osserviamo che

$$\cos((2n+1)\pi) = \cos(2n\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1, \text{ quindi } a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+2}}$$

e la serie è a termini negativi.

Poniamo ora $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{\sqrt{n+2}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = -1.$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge positivamente, dal criterio del confronto asintotico, otteniamo che $\sum_n a_n$ diverge negativamente.

9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} =$

(a) $+\infty$

(b) non esiste

(c) 0

► (d) $-\infty$

Soluzione:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(3-x+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\cos(3-0+0)}{0^+} = \frac{\cos 3}{0^+} = -\infty$$

poiché $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ quindi $\cos 3 < 0$.

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2} =$

(a) non esiste

(b) 0

► (c) $+\infty$

(d) $-\infty$

Soluzione:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2} = \frac{0+1}{0^+} = +\infty$$